Edwin KOŹNIEWSKI
Politechnika Białostocka
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska
Katedra Geoinformacji i Gospodarki Przestrzennej
ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok
tel./fax: 79 79 95 964 e-mail: e.kozniewski@pb.edu.pl

O NIEZMIENNIKU CHARAKTERYSTYCZNYM RZUTOWANIA PROSTOKĄTNEGO

Słowa kluczowe: *prostopadłość, rzut prostokątny, niezmiennik rzutowania prostokątnego*

Zdarza się, że w podręcznikach geometrii wykreślnej niezmiennik charakterystyczny rzutowania prostokątnego jest stosowany w odwrotnym znaczeniu niż jest formułowany. W podręczniku B. Grochowskiego czytamy: „*Rzut prostokątny kąta prostego, którego jedno ramię jest równoległe do rzutni, jest kątem prostym*.” (Grochowski, 1995, str. 18). Później (str. 91) autor, charakteryzując prostopadłość prostej do płaszczyzny, stwierdza wystarczalność warunku prostopadłości rzutów, ale w odniesieniu do dwu prostych: warstwowej i czołowej. F. Otto i E. Otto piszą: „Weźmy pod uwagę prostą a leżącą na rzutni albo równoległą do rzutni oraz ukośną b. Załóżmy, że są one do siebie prostopadłe. Można z łatwością udowodnić, opierając się na elementarnych wiadomościach ze stereometrii, że rzuty a' i b' tych prostych są do siebie prostopadłe. Twierdzenie to można odwrócić, t.zn. można udowodnić, że gdy jest $a' \perp b'$ i $a=a'$ (lub tylko $a \| a'$), to już wówczas będzie $a \perp b$.” (Otto i Otto, 1994, str. 38). Inni autorzy poprzestają na sformułowaniu niezmiennika w postaci jednego zdania warunkowego. Wyczerpującą (chociaż bez dowodów) dyskusję znajdujemy w monografii *Geometria wykreślna* pod red. St. Polańskiego. Mamy tam dwa twierdzenia: „*Jeżeli dwie proste są prostopadłe i jedna z nich jest prostą warstwową, a pozostała nierzutującą, to rzuty prostokątne tych prostych są prostopadłe*.” oraz „*Jeżeli rzuty prostokątne dwu prostych t i u są prostopadłe i co najmniej jedna z tych prostych jest prostą warstwową, to proste t i u są prostopadłe*.” (Polański i in., 1975, str. 55-56). W praktyce nauczania podstaw rzutów prostokątnych istnieje jednak obawa, że formułowany wprost (jako zdanie $\ldots \rightarrow \quad u \rightarrow v$) niezmiennik będzie stosowany w postaci odwrotnej ($\ldots \rightarrow \quad v \rightarrow u$) bez dodatkowych wyjaśnień. W niniejszym przyczynku podamy propozycję pełnego, zwięzłego spojrzenia na tę ważną własność. Niezmiennik sformułujemy w sposób następujący.

NCh. *Jeżeli jedno z ramion kąta jest równoległe, a drugie nie jest prostopadłe do rzutni, to kąt ten jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy jego rzut prostokątny jest kątem prostym.*

Dowód: Niech π będzie rzutnią; a i b będą prostymi zawierającymi ramiona kąta; a' i b' będą prostymi zawierającymi ramiona rzutu prostokątnego tego kąta, α i β będą płaszczyznami rzutującymi ramion kąta, $c = \alpha \cap \beta$.

Mamy (z warunków rzutowania prostokątnego, niezależnie od tego jaki jest kąt) następujące zdania:

p: $a, a' \subset \alpha, b, b' \subset \beta, c \perp \pi, \alpha \perp \pi, \beta \perp \pi, c \perp a', b'$.

(z założenia)

q: $a \parallel \pi, b \neg \perp \pi$. ($\neg$ oznacza negację i założenia takie nie zmniejszają ogólności rozważań)

Niech dalej

r: $a \perp b$, s: $a' \perp b'$.

Przy przyjętych oznaczeniach, formalnie, twierdzenie NCh ma postać:

$$p \wedge q \rightarrow (r \leftrightarrow s).$$

Należy udowodnić dwa twierdzenia: ‘ $\rightarrow$ ’: $p \wedge q \rightarrow (r \rightarrow s)$; ‘ $\leftarrow$ ’: $p \wedge q \rightarrow (s \rightarrow r)$.

‘ $\rightarrow$ ’: Mamy $a \perp b$ i $a \| a'$. Zatem $a' \perp b$ (nie szkodzi jeśli a' i b są skośne). Ale $c \perp a', b'$. Zatem $a' \perp b, c$, czyli $a' \perp \beta(b, c)$, czyli $a' \perp \beta(b', c)$. Stąd $a' \perp b'$.

‘ $\leftarrow$ ’: Mamy $a' \perp b'$ i $a \| a'$. Zatem $a \perp b'$ (nie szkodzi jeśli a i b' są skośne) i $a \perp c$. Mamy więc $a \perp \beta(b', c)$, czyli $a \perp \beta(b, c)$. Zatem $a \perp b$.

Sformułowaną tak, i udowodnioną w prosty sposób, własność możemy z powodzeniem przedstawić w ramach wykładu lub innych zajęć audytoryjnych. Jest okazja, by powtórzyć i/lub uzupełnić wiadomości o relacji prostopadłości w euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej, a także pokazać przykład analizy logicznej twierdzenia geometrycznego. Mamy krótką próbkę kształtowania wyobraźni przestrzennej z ćwiczeniem logiki matematycznej.

Literatura:

[1] Grochowski E. (1995): Geometria wykreślna. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

[2] Otto F., Otto E. (1994): Podręcznik geometrii wykreślnej. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

[3] Polański St. (red.) (1975): Geometria wykreślna. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.